

Matematika

Cyklus 1

Pochopenie grafov a závislosti

Časť 3

Téma 3	Objavujeme typy závislosti
Trvanie	3 vyučovacie hodiny (135 minút)
Trieda/Vek	Séria je určená pre žiakov v záverečných ročníkoch základnej školy, ktorí nepoznajú pojem funkcií, a v tejto sérii (7. – 8. ročník) tento pojem nepredstavujeme.
Cieľ	<i>Cieľom tohto modulu je rozvíjať intuitívne pochopenie typov vzťahov a ich grafov.</i> 1) Vytváranie a interpretácia grafov v kontexte analýzy návštevnosti na intuitívnej úrovni 2) Rozvíjanie porozumenia grafom 3) Rozvíjanie intuitívneho pochopenia jasných vzťahov medzi premennými 4) Rozvíjanie kovariantného uvažovania
Popis	Študenti vytvárajú a skúmajú grafy popisujúce zmeny vzdialenosti v čase pomocou stelesnených experimentov. Študenti používajú senzor EMPE a softvér EMPE počas hodín. Senzor meria vzdialenosť k najbližšej prekážke a softvér zobrazuje graf tejto vzdialenosti v priebehu času v reálnom čase. Študenti sa zapájajú do stelesnených experimentov chôdzou so senzorom a analýzou grafickej interpretácie svojho pohybu. Majú možnosť vytvárať a pozorovať rôzne grafy s rôznymi tvarmi. Vykonávajú aj inverzné činnosti – pohybujú sa tak, aby odrážali pohyb zobrazený v poskytnutých grafoch, a interpretujú a analyzujú rôzne grafy pohybu. Táto téma vedie k intuitívnemu pochopeniu explicitných vzťahov a ich interpretácie ako grafov. Prostredníctvom kontextu merania vzdialenosti a diskusie o „nemožných grafoch“ študenti samostatne objavujú podmienky pre explicitné vzťahy (ktoré budú v neskorších hodinách formalizované ako definície funkcií) intuitívnym a praktickým spôsobom.



This material is provided by the [EMPE Team](#), responsible institution: University of the National Education Commission in Krakow.

Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#) Excluded are funding

logos and CC icons / module icons.

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Učebné pomôcky	- EMPE senzor so softvérom - stolný počítač alebo notebook s webovým prehliadačom - dizajnová obrazovka - projektor - pracovné listy pre študentov
-----------------------	--

Počas vyučovania učitelia a študenti používajú senzor EMPE so softvérom EMPE vyvinutým v rámci projektu EMPE. Návod na používanie senzora nájdete na webovej stránke projektu (<https://empe.uken.krakow.pl>).

TÉMA 3. Typy závislostí zistujeme analýzou návštevnosti

PRIEBEH LEKCIE

Pokračujeme v číslovaní aktivít z 1. a 2. časti 1. cyklu.

Aktivita 8. Zaujímavé grafy

8a) Vymyslite zaujímavý graf

Vlastná práca študentov. Študenti dokončia pracovný list 4 načrtnutím vlastného zaujímavého grafu znázorňujúceho ich pohyb vzhľadom na stenu:



This material is provided by the [EMPE Team](#), responsible institution: University of the National Education Commission in Krakow.

Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#) Excluded are funding

logos and CC icons / module icons.

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Aktivita 8. Zaujímavé grafy

Aktivita 8a)

Vytvorte si vlastný zaujímavý graf, ktorý znázorňuje váš pohyb vzhľadom na stenu:



Obrázok 1. Pracovný list 4, aktivita 8a.

8b) Je graf uskutočniteľný?

Práca vo dvojiciach. Žiaci si vymieňajú pracovné listy vo dvojiciach. Žiaci majú za úlohu analyzovať graf svojho partnera.

:

Študenti majú odpovedať na otázku v pracovnom hárku 3:

Predstavuje tento graf možný pohyb?

ÁNO / NIE / NEVIEM

Ak ÁNO, opište tento krok slovami, ak NIE, napíšte prečo a ak NEVIEM, uveďte svoje pochybnosti:



This material is provided by the [EMPE Team](#), responsible institution: University of the National Education Commission in Krakow.

Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#) Excluded are funding

logos and CC icons / module icons.

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Aktivita 8b. Vymeňte si pracovné listy s druhou osobou pri vašom stole.

Predstavuje tento graf možný pohyb?

ÁNO / NIE / NEVIEM

Ak ÁNO, opíšte tento krok slovami, ak NIE, napíšte prečo a ak NEVIEM, uveďte svoje pochybnosti:

.....

.....

.....

Kreslenie 2. Pracovný list 4. Aktivita 8b

8c) Vytvárame vybrané grafy

Práca s celou triedou.

Ak to čas a organizačné možnosti dovoľia, môžete požiadať dobrovoľníkov, aby pomocou senzora vykonali pohyb zobrazený v grafoch ich kolegov.

8 d) Analýza nemožných grafov

Učiteľ požiada študentov, aby na tabuľu prepísali grafy (alebo fragmenty grafov), ktoré vybral a ktoré podľa ich názoru nie je možné vytvoriť.

Na tabuli sa zobrazujú rôzne návrhy študentov. Obrázok 3 zobrazuje vzorový pracovný list s nemožným grafom a obrázok 4 zobrazuje dve tabule z takýchto hodín.



This material is provided by the [EMPE Team](#), responsible institution: University of the National Education Commission in Krakow.

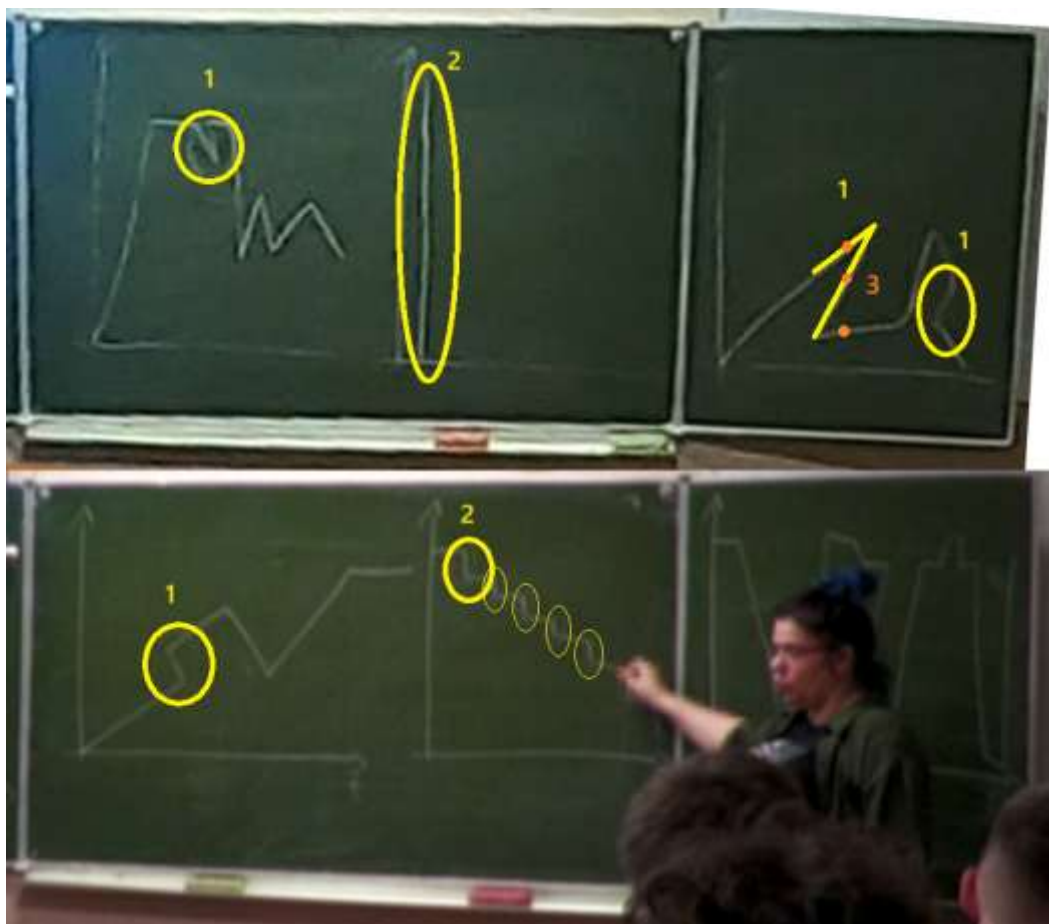
Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#) Excluded are funding

logos and CC icons / module icons.

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Obrázok 3. Ukázkový pracovný list s nemožným grafom na dokončenie



Obrázok 4. Tabuľky z hodiny počas analýzy nemožných grafov



This material is provided by the [EMPE Team](#), responsible institution: University of the National Education Commission in Krakow.

Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#) Excluded are funding

logos and CC icons / module icons.

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Učiteľ zabezpečí, aby sa zobrazili grafy znázorňujúce nesplnenie oboch podmienok definujúcich funkciu v rôznych verziách. Pri tabuli diskutujeme o tom, prečo nie je možné získať graf počas pohybu so senzorom.

Dôraz kladieme na prirodzený jazyk. Existujú štyri možné situácie, ktoré študenti opisujú rôzne. Obrázok 4 zobrazuje vybrané situácie označené 1, 2 a 3. Pokiaľ ide o situáciu typu 1, študenti prirodzene hovoria, že nie je možné vrátiť sa v čase (zdôrazňujú kreslenie grafu „doľava“). Pokiaľ ide o situáciu typu 2, študenti hovoria, že nie je možné mať toľko vzdialeností naraz, a niekedy hovoria, že nie je možné teleportovať sa v čase alebo mať viacero miest. Situáciu 3 možno diskutovať ako dôsledok situácie 1, ako na obrázku 4, alebo môže vzniknúť v inom kontexte. Je dôležité diskutovať o tom, že nemôžeme získať viac ako 1 vzdialenosť od steny naraz, meranú jedným senzorom.

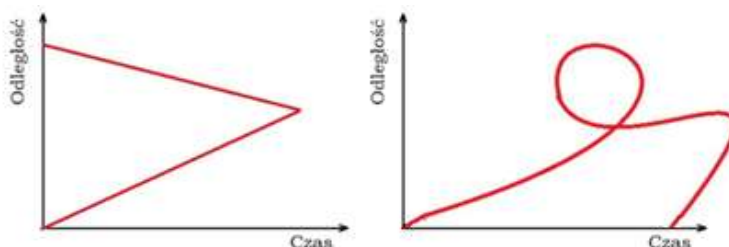
nemožné situácie v grafoch - zhrnutie

Zhrnieme nemožné situácie.

- Skúsme zoskupiť dôležité dôvody nemožných grafov.

Učiteľ zobrazí grafy typov nemožných grafov (*Prezentácia*).

Obrázky 5 a 6 predstavujú analýzu prvej situácie. Študenti si ju zvyčajne predstavujú ako návrat v čase (obrázok 5):



Obrázok 5. Analýza prvej nemožnej situácie

Upozorňujeme študentov na skutočnosť, že by sa potom vykonávali dve alebo viac meraní vzdialenosti s jedným zariadením naraz (obrázok 6).

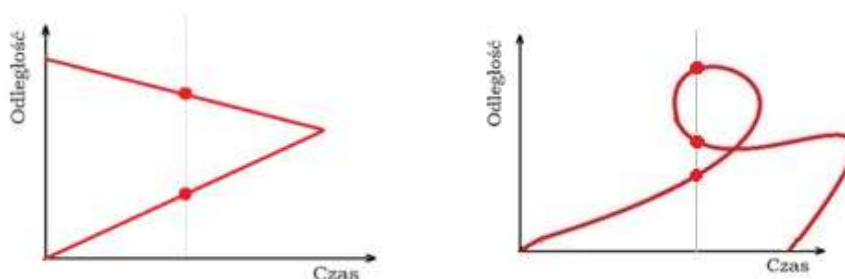


This material is provided by the [EMPE Team](#), responsible institution: University of the National Education Commission in Krakow.

Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#) Excluded are funding

logos and CC icons / module icons.

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Obrázok 6. Analýza prvej nemožnej situácie – pokračovanie .

Nasledujúca situácia znázornená na obrázku 7 zobrazuje nekonečný počet nameraných hodnôt súčasne.



Obrázok 7. Analýza druhej nemožnej situácie

Komentár: Vertikálne segmenty grafu sú pre študentov kvalitatívne odlišným prípadom, preto ich posudzujeme samostatne. Nezobrazujú dve alebo viac hodnôt vyskytujúcich sa súčasne a vertikálna čiara signalizuje kontinuitu a pohyb. Študenti si môžu takýto graf spájať s vertikálnym pohybom. Často sa zameriavajú iba na závislú premennú (y) a ignorujú zmeny nezávislej premennej (x). Preto by sa tento prípad mal prediskutovať samostatne a až potom spojiť do jednej podmienky.

Učiteľ kladie prvú kľúčovú, zhrňujúcu otázku:

- Akú podmienku musí graf spĺňať, aby bol uskutočniteľný? [Študenti by mali odpovedať, že **maximálne jeden výsledok merania v danom okamihu** .]

Učiteľ kladie druhú kľúčovú otázku:

- A čo tento graf (obrázok 8)? Nemáme viac ako jedno meranie naraz, je to uskutočniteľné?

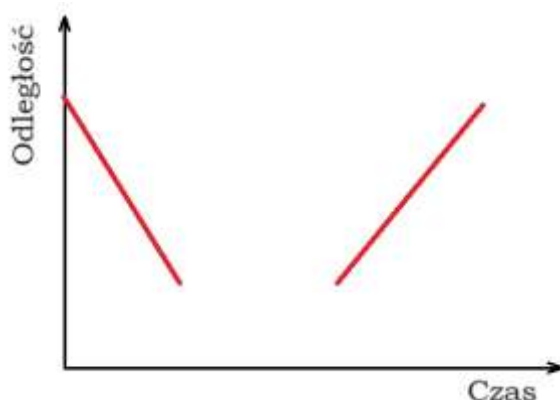


This material is provided by the [EMPE Team](#), responsible institution: University of the National Education Commission in Krakow.

Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#) Excluded are funding

logos and CC icons / module icons.

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Obrázok 8. Analýza poslednej nemožnej situácie

[Študenti by mali odpovedať, že **medzera v grafe nie je možná**. Učiteľ by sa mal opýtať prečo. Ak majú študenti ťažkosti, učiteľ sa môže opýtať:]

- Čo má náš graf znázorňovať?

Študenti by to mali zdôvodniť. Graf znázorňuje zmeny vzdialenosti senzora od danej prekážky v priebehu času. Nie je možné mať senzor bez vzdialenosti od prekážky; senzor nezmizne.

Komentár: Taktiež predpokladáme, že merací senzor sa nepokazil. Aj keby áno, musíme si pamätať, čo meria (vzdialenosť k najbližšej prekážke), aby táto vzdialenosť stále existovala a bolo možné ju merať inými metódami.

Učiteľ to zhrnie otázkou:

- Ako stručne môžeme sformulovať podmienku, aby bol graf uskutočniteľný?

[Študenti by mali odpovedať, že **vždy musí existovať presne jedna** nameraná hodnota.]

Komentár: Táto podmienka je intuitívne formulovaná podmienka definujúca funkčnú závislosť v kontexte merania vzdialenosti – pre každý argument (časový okamih) existuje práve jedna hodnota (meranie).

- Závislosti, ktoré spĺňajú takéto podmienky, sa nazývajú jednoznačné.

Nakoniec môže učiteľ spomenúť, že v starších ročníkoch sa naučia, že závislosti, ktoré spĺňajú takúto podmienku, sa nazývajú *funkcie*.



This material is provided by the [EMPE Team](#), responsible institution: University of the National Education Commission in Krakow.

Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#) Excluded are funding

logos and CC icons / module icons.

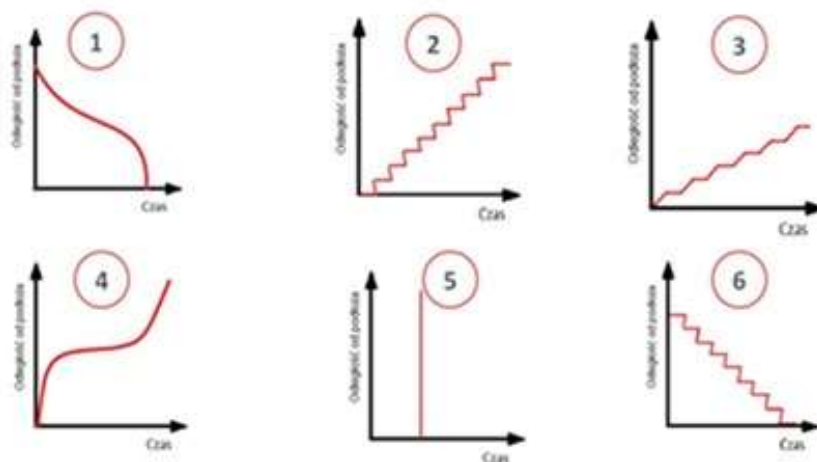
The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Úloha na schodoch – pripojenie

Zopakujeme si úlohu z predchádzajúcej hodiny. Učiteľ zobrazí snímku s úlohou.

- Ako by ste mohli vyriešiť úlohu o schodoch, keby ste vedeli rozpoznať nemožné grafy?

Predstav si, že vystupuješ po schodoch rovnomerným tempom (obr. vedľa). Ktorý z grafov najlepšie znázorňuje, ako sa mení tvoja vzdialenosť od podlažia počas tohoto pohybu.



[Študenti odpovedajú, že grafy 2, 5 a 6 sú nemožné a že v grafoch 1 a 6 sa vzdialenosť od zeme znižuje, takže tiež nezodpovedajú úlohe. Eliminačným procesom zostávajú dve možné správne odpovede – grafy 3 a 4.]

Aktivita 9. Vymyslíte pohyb, ktorého grafom je vodorovná čiara.

Učiteľ zobrazí snímku a príkaz.

- Vymyslíte pohyb, pri ktorom je meraná vzdialenosť konštantná:



This material is provided by the [EMPE Team](#), responsible institution: University of the National Education Commission in Krakow.

Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#) Excluded are funding

logos and CC icons / module icons.

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Obrázok 9. Vymyslite pohyb s takýmto grafom.

Študenti najprv premýšľajú o pohybe individuálne. Potom si vymieňajú a diskutujú o nových nápadoch vo dvojiciach. Po chvíli, keď fáza dvojice už nie je účinná, učiteľ vedie diskusiu s celou triedou, zhromažďuje rôzne nápady a pýta sa na iné typy pohybu. Študenti vykonávajú vymyslený pohyb pomocou senzora na overenie svojich odpovedí.

Komentár: Študenti si najprv uvedomia možnosť stáť na mieste. Po chvíli by sa však mali objaviť ďalšie nápady. Nižšie uvádzame niekoľko príkladov, ktoré sa objavili počas vyučovania.

- Meranie vzdialenosti od steny pri skákaní s nasadeným senzorom
- Meranie vzdialenosti od steny pri pohybe v rovnakej vzdialenosti od steny
- Meranie vzdialenosti od stropu/podlahy pri voľnej chôdzi po miestnosti – v tomto prípade sa riadite úlohou PRETEST o drone a skutočnosťou, že dron sa mohol pohybovať horizontálne a mať nezmenenú vzdialenosť od zeme (obr. 10).



This material is provided by the [EMPE Team](#), responsible institution: University of the National Education Commission in Krakow.

Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#) Excluded are funding

logos and CC icons / module icons.

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Obrázok 10. Meranie vzdialenosti od stropu/podlahy.

- *Meranie vzdialenosti od dvoch osôb pohybujúcich sa súčasne (obr. 11)*



Obrázok 11. Meranie vzdialenosti dvoch osôb pohybujúcich sa súčasne.

- *Meranie vzdialenosti od osoby stojacej v strede kruhu pri pohybe v kruhu (obr. 12)*



This material is provided by the [EMPE Team](#), responsible institution: University of the National Education Commission in Krakow.

Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#) Excluded are funding

logos and CC icons / module icons.

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Obrázok 12. Vzdialenosť pri kruhovom pohybe.

- Meranie vzdialenosti od osôb stojacich v kruhu osobou otáčajúcou sa okolo svojej vlastnej osi (obr. 13)



Obrázok 13. Vzdialenosť od ľudí usporiadaných v kruhu osobou otáčajúcou sa okolo svojej vlastnej osi.

Rôzne odpovede študentov môžu priniesť zaujímavé nápady, ktoré si vyžadujú preskúmanie. Napríklad jedna trieda požiadala študentov, aby zmerali vzdialenosť od



This material is provided by the [EMPE Team](#), responsible institution: University of the National Education Commission in Krakow.

Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#) Excluded are funding

logos and CC icons / module icons.

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

priesečníka uhlopriečok štvorca k stranám štvorca. Bol zostrojený model, v ktorom bol senzor umiestnený na otočnej stoličke (obr. 14 a 15) a graf bol preskúmaný:



Obrázok 14. Model na meranie vzdialenosti priesečníka uhlopriečok štvorca od strán štvorca (1)



Obrázok 15. Model na meranie vzdialenosti priesečníka uhlopriečok štvorca od strán štvorca (2)



This material is provided by the [EMPE Team](#), responsible institution: University of the National Education Commission in Krakow.

Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#) Excluded are funding

logos and CC icons / module icons.

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.