

Matematyka

Cykl I - Szkoła podstawowa

Rozumienie wykresów i zależności

Temat 3	Odkrywamy rodzaje zależności analizując ruch
Czas trwania	2 - 3 godziny lekcyjne (90 – 135 minut)
Klasa/Wiek	Cykl adresowany jest dla uczniów z końcowych klas szkoły podstawowej, którzy nie znają pojęcia funkcji i podczas tego cyklu nie wprowadzamy tego pojęcia (klasy 7-8).
Cel	<i>Celem tego modułu jest kształtowanie intuicyjnego rozumienia rodzajów zależności i ich wykresów.</i> 1) Tworzenie i interpretowanie wykresów w kontekście analizy ruchu na poziomie intuicji 2) Kształtowanie rozumienia wykresów 3) Kształtowanie intuicyjnego rozumienia jednoznacznych zależności między zmiennymi 4) Rozwijanie rozumowania współzmiennościowego
Opis	Uczniowie tworzą i badają wykresy opisujące zmiany odległości w czasie za pomocą ucieleśnionych eksperymentów. Uczniowie używają podczas lekcji sensora EMPE wraz z oprogramowaniem EMPE. Sensor mierzy odległość od najbliższej przeszkody, a oprogramowanie pokazuje w czasie rzeczywistym wykres zmian tej odległości w czasie. Uczniowie są zaangażowani w eksperymenty ucieleśnienia chodząc z czujnikiem i analizując graficzną interpretację swojego ruchu. Mają możliwość tworzenia i obserwowania wielu wykresów o różnych kształtach, wykonują również aktywności odwrotne – poruszają się w taki sposób, aby odzwierciedlić ruch przedstawiony na dostarczonych wykresach, a także interpretują i analizują różne wykresy ruchu. Temat prowadzi do intuicyjnego zrozumienia jednoznacznych zależności i ich interpretacji w postaci wykresów. Ze względu na kontekst pomiaru odległości i dyskusję na temat "niemożliwych wykresów", uczniowie w intuicyjny i praktyczny sposób, samodzielnie odkrywają warunki jednoznacznych zależności (które w późniejszych klasach zostaną sformalizowane jako definicja funkcji).

This material is provided by the [EMPE Team](#), responsible institution: University of the National Education Commission in Krakow.



Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#). Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Pomoce dydaktyczne	- sensor EMPE z oprogramowaniem - komputer stacjonarny lub laptop z przeglądarką internetową - ekran projektowy - projektor - karty pracy dla uczniów
---------------------------	---

Na lekcji nauczyciel i uczniowie wykorzystują sensor EMPE z oprogramowaniem EMPE opracowany w ramach projektu EMPE. Instrukcja korzystania z sensora znajduje się na stronie projektu (<https://empe.uken.krakow.pl>).

TEMAT 3. Odkrywamy rodzaje zależności analizując ruch

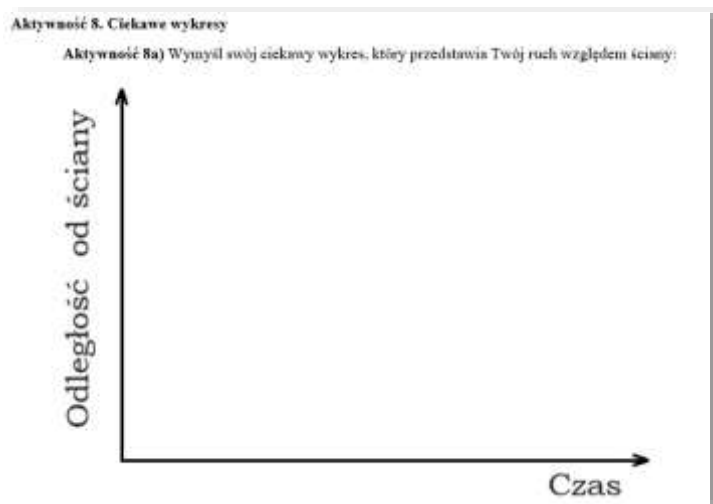
PRZEBIEG LEKCJI

Kontynuujemy numerację aktywności z Części 1 i 2 Cyklu I.

Aktywność 8. Ciekawe wykresy

8a) Wymyśl ciekawy wykres

Praca własna uczniów. Uczniowie wypełniają Kartę Pracy 4 szkicując swój ciekawy wykres przedstawiający swój ruch względem ściany:



Rysunek 1. Karta Pracy 4, Aktywność 8a.

This material is provided by the [EMPE Team](#), responsible institution: University of the National Education Commission in Krakow.



Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#) Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

8b) Czy wykres jest możliwy do wykonania?

Praca w parach. Uczniowie w parach zamieniają się kartami pracy. Zadaniem uczniów jest analiza wykresu kolegi/koleżanki. Uczniowie mają odpowiedzieć na pytanie zamieszczone na Karcie Pracy 3:

Czy ten wykres przedstawia ruch możliwy do wykonania?

TAK / NIE / NIE WIEM

Jeśli TAK, to opisz ten ruch słowami, jeśli NIE, to napisz dlaczego, a jeśli NIE WIESZ, to przedstaw swoje wątpliwości:

Aktywność 8b. Wymień się z drugą osobą z ławki kartami pracy.

Czy ten wykres przedstawia ruch możliwy do wykonania?

TAK / NIE / NIE WIEM

Jeśli TAK, to opisz ten ruch słowami, jeśli NIE, to napisz dlaczego, a jeśli NIE WIESZ, to przedstaw swoje wątpliwości:

.....

.....

.....

.....

Rysunek 2. Karta Pracy 4. Aktywność 8b

8c) Wykonujemy wybrane wykresy

Praca z całą klasą.

W razie możliwości czasowych i organizacyjnych można poprosić ochotników do wykonania z sensorem ruchu przedstawionego na wykresach kolegów.

8d) Analiza wykresów niemożliwych do wykonania

Nauczyciel prosi uczniów, by przerysowali na tablicę wybrane przez niego wykresy (lub fragmenty wykresów), które ich zdaniem nie są możliwe do wykonania.

This material is provided by the [EMPE Team](#), responsible institution: University of the National Education Commission in Krakow.



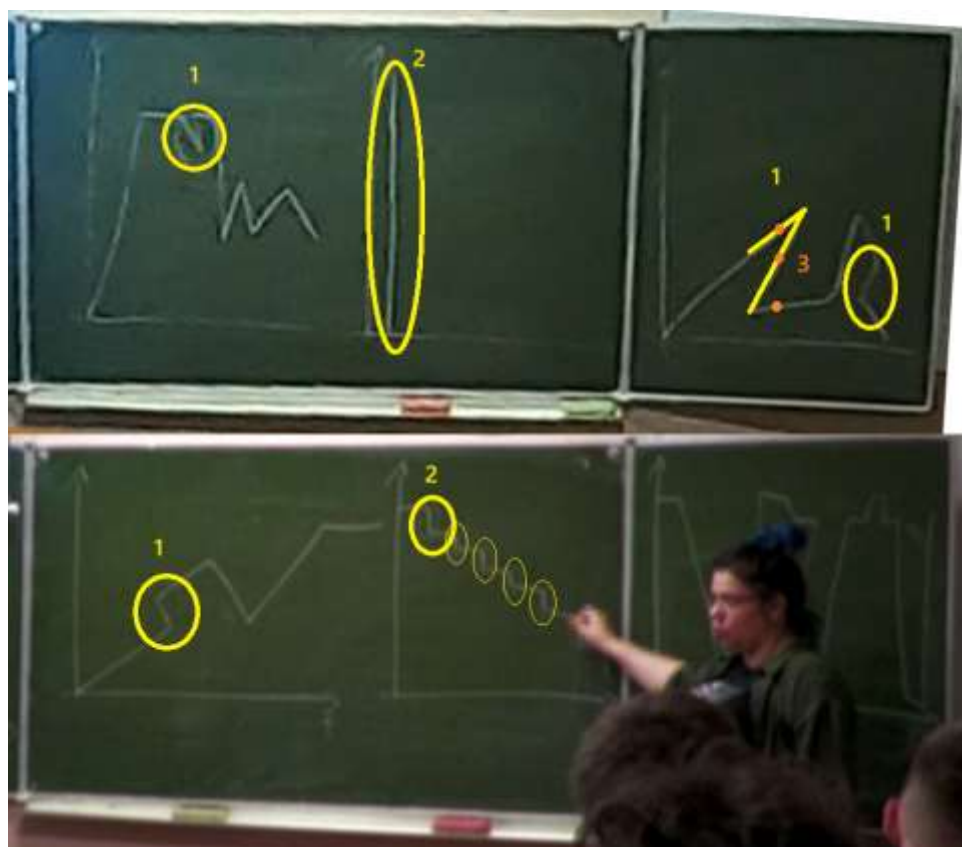
Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#) Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Na tablicy pojawiają się różne propozycje uczniów. Rysunek 3 przedstawia przykładową kartę pracy z niemożliwym wykresem, a Rysunek 4 przedstawia dwie tablice z takich lekcji.



Rysunek 3. Przykładowa karta pracy z niemożliwym wykresem do wykonania



Rysunek 4. Tablice z lekcji podczas analizy niemożliwych do wykonania wykresów

This material is provided by the [EMPE Team](#), responsible institution: University of the National Education Commission in Krakow.



Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#) Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Nauczyciel czuwa, by pojawiły się wykresy pokazujące niespełnienie obu warunków definiujących funkcję w różnych odślonach. Omawiamy przy tablicy dlaczego wykres jest niemożliwy do uzyskania podczas ruchu z sensorem.

Dbamy o naturalny język. Możliwe są cztery sytuacje, o których uczniowie różnie mówią. Na Rysunku 4 przedstawione są wybrane sytuacje podpisane jako 1, 2 i 3. O sytuacjach typu 1 uczniowie mówią naturalnie, że nie można cofnąć się w czasie (podkreślają rysowanie wykresu „w lewo”), o sytuacjach typu 2 uczniowie mówią, że nie można mieć tylu odległości w jednym momencie, czasami mówią, że nie można się teleportować w czasie lub mieć multi-lokacji. Sytuacja 3 może zostać omówiona jako konsekwencja sytuacji 1, tak jak na Rysunku 13, a może wypłynąć w innym kontekście. Ważne, by zostało omówione, że nie możemy uzyskać więcej niż 1 odległość od ściany w jednej chwili mierzonej jednym sensorem.

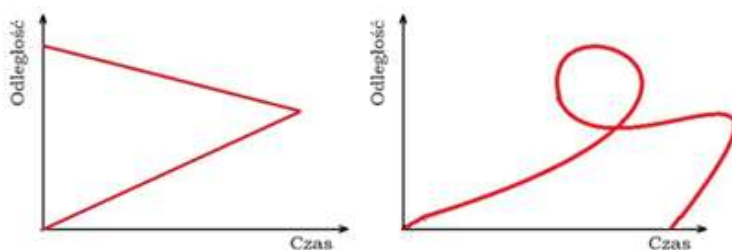
Sytuacje możliwe vs. niemożliwe na wykresach - podsumowanie

Dokonujemy podsumowania sytuacji niemożliwych.

- Spróbujmy pogrupować ważne przyczyny wykresów niemożliwych do wykonania.

Nauczyciel wyświetla wykresy rodzajów niemożliwych wykresów (*Prezentacja*).

Rysunek 5 i 6 (slajdy 5 i 6) przedstawiają analizę pierwszej sytuacji. Zwykle jest to ujmowane przez uczniów jako cofanie się w czasie (Rysunek 5):



Rysunek 5. Analiza pierwszej sytuacji niemożliwej do wykonania

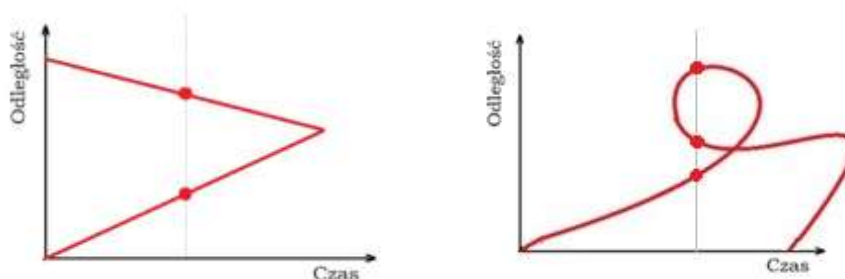
Zwracamy uwagę uczniów na to, że byłyby wówczas dwa lub więcej pomiarów odległości jednym urządzeniem w danym momencie (Rysunek 6).

This material is provided by the [EMPE Team](#), responsible institution: University of the National Education Commission in Krakow.



Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#) Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Rysunek 6. Analiza pierwszej sytuacji niemożliwej do wykonania – c.d.

Kolejna sytuacja przedstawiona na Rysunku 7 (slajd 7) przedstawia nieskończenie wiele wartości pomiarów w jednej chwili.



Rysunek 7. Analiza drugiej sytuacji niemożliwej do wykonania

Komentarz. Fragmenty pionowe wykresu są jakościowo innym przypadkiem dla uczniów, dlatego rozważamy je odrębnie. Nie widać w nich dwóch, czy kilku wartości osiąganych w tym samym czasie, a pionowa prosta sygnalizuje ciągłość i ruch. Uczniowie mogą utożsamiać taki wykres z ruchem pionowo w górę. Często zwracają uwagę tylko na zmienną zależną (y) ignorując zmiany w zmiennej niezależnej (x). Dlatego należy ten przypadek omówić osobno i dopiero później oba przypadki ująć w jeden warunek.

Nauczyciel zadaje pierwsze kluczowe, podsumowujące pytanie:

- Jaki warunek musi spełniać wykres, aby był możliwy do wykonania? [Uczniowie powinni odpowiedzieć, że **nie więcej niż jeden wynik pomiaru w danym momencie.**]

Nauczyciel zadaje drugie kluczowe pytanie:

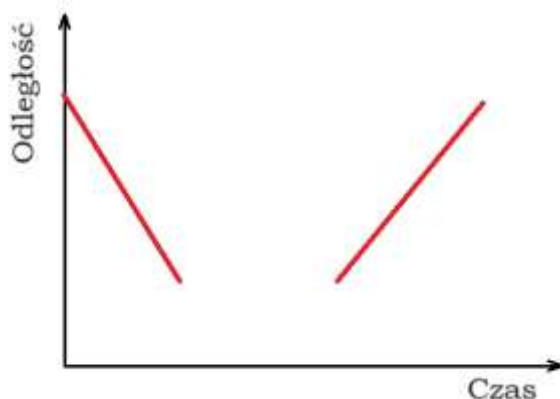
This material is provided by the [EMPE Team](#), responsible institution: University of the National Education Commission in Krakow.



Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#) Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

- A co powiecie o tym wykresie (slajd 8, Rysunek 8)? Nie mamy tu więcej niż jednego pomiaru w danym momencie, czy jest on możliwy do wykonania?



Rysunek 8. Analiza ostatniej sytuacji niemożliwej do wykonania

[Uczniowie powinni odpowiedzieć, że **nie jest możliwa przerwa w wykresie**. Nauczyciel powinien dopytać dlaczego. Jeśli uczniowie będą mieli trudności to nauczyciel może zapytać:

- Co ma przedstawiać nasz wykres?

Uczniowie powinni uzasadnić, że wykres przedstawia zmiany odległości sensora od danej przeszkody w czasie. Brak odległości sensora od przeszkody nie jest możliwy, sensor nie zniknie.]

Komentarz. Zakładamy też, że mierzący sensor się nie zepsuł. A nawet gdyby się zepsuł, to należy przypomnieć, co on mierzy (odległość od najbliższej przeszkody), więc ta odległość i tak istnieje i można ją zmierzyć innymi sposobami.

Nauczyciel podsumowuje zadając pytanie:

- Jak krótko możemy podać warunek na to, by wykres był możliwy do wykonania?

[Uczniowie powinni odpowiedzieć, że **musi być zawsze dokładnie jedna wartość** pomiaru w danym momencie.]

Komentarz. Ten warunek jest intuicyjnie sformułowanym warunkiem definiującym zależność funkcyjną w kontekście mierzenia odległości – dla każdego argumentu (momentu czasu) istnieje dokładnie jedna wartość (pomiaru).

- Zależności, które spełniają takie warunki nazywają się jednoznacznymi.

This material is provided by the [EMPE Team](#), responsible institution: University of the National Education Commission in Krakow.



Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#) Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Nauczyciel może na koniec wspomnieć, że w starszych klasach dowiedzą się, że zależności, które spełniają taki warunek nazywamy *funkcjami*.

Zadanie ze schodami – nawiązanie

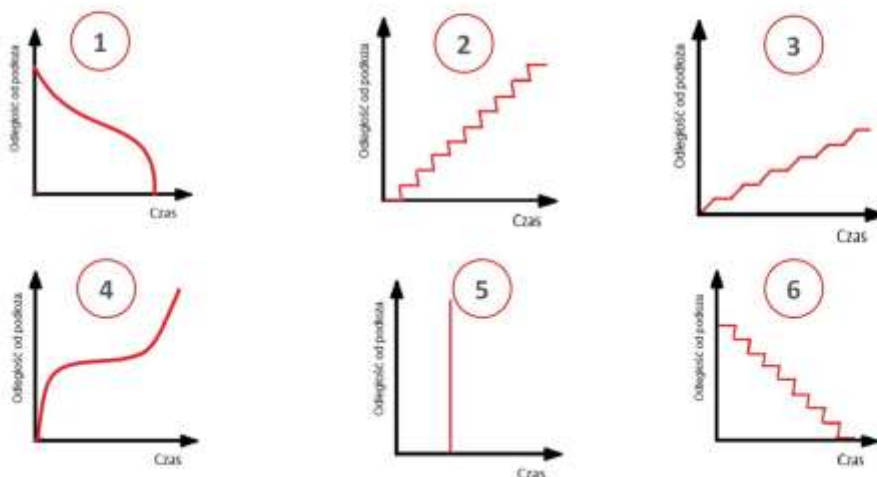
Przypominamy zadanie z poprzedniej lekcji. Nauczyciel wyświetla slajd z zadaniem.

- Jak znając sposób na rozpoznanie wykresów niemożliwych można było rozwiązać zadanie o schodach?

Wyobraź sobie, że wchodzisz po schodach w równym tempie (rysunek obok).

Który z wykresów najdokładniej przedstawia, jak zmienia się

Twoja odległość od podłoża w czasie tego ruchu?



[Uczniowie odpowiadają, że wykresy 2, 5, i 6 są niemożliwe, a w wykresach 1 i 6 odległość od podłoża maleje, czyli też nie odpowiadają treści zadania. Drogą eliminacji zostają dw, które mogą być poprawne – wykresy 3 i 4.]

Aktywność 9. Wymyśl ruch, którego wykresem jest prosta pozioma

Nauczyciel wyświetla slajd i polecenie.

- Wymyśl ruch, w którym mierzona odległość jest stała:

This material is provided by the [EMPE Team](#), responsible institution: University of the National Education Commission in Krakow.



Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#) Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Rysunek 9. Wymyśl ruch o takim wykresie.

Uczniowie najpierw indywidualnie myślą nad ruchem. Następnie wymieniają się i dyskutują nowe pomysły w parach. Po dłuższej chwili, gdy już faza w parach przestała być efektywna, Nauczyciel prowadzi dyskusję z całą klasą zbierając różne pomysły i dopytując o jeszcze inne rodzaje ruchu. Uczniowie wykonują wymyślony ruch z zastosowaniem pomiaru przez czujnik, aby zweryfikować swoje odpowiedzi.

Komentarz. Uczniowie najpierw widzą możliwość stania w bezruchu. Jednak po chwili powinny pojawić się inne pomysły. Poniżej podajemy wybrane przykłady, które pojawiły się na lekcjach.

- Mierzenie odległości od ściany podczas skakania z czujnikiem w miejscu
- Mierzenie odległości od ściany podczas przemieszczania się w tej samej odległości od ściany
- Mierzenie odległości od sufitu/podłogi podczas swobodnego spaceru po pomieszczeniu – w tym przypadku należy nawiązać do zadania z PRETESTU o dronie i o tym, że dron mógł się poruszać w poziomie i mieć niezmienną odległość od podłoża (Rys. 10)

This material is provided by the [EMPE Team](#), responsible institution: University of the National Education Commission in Krakow.



Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#) Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Rysunek 10. Mierzenie odległości od sufitu/podłogi.

- *Mierzenie odległości od dwóch osób poruszających się jednocześnie (Rys. 11)*



Rysunek 11. Mierzenie odległości od dwóch osób poruszających się jednocześnie.

- *Mierzenie odległości od osoby stojącej na środku okręgu podczas ruchu po okręgu (Rys. 12)*

This material is provided by the [EMPE Team](#), responsible institution: University of the National Education Commission in Krakow.



Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#) Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Rysunek 12 Odległość w ruchu po okręgu.

- *Mierzenie odległości od osób ustawionych w krąg przez osobę kręcącą się wokół własnej osi (Rys. 13)*



Rysunek 13. Odległość od osób ustawionych w krąg przez osobę kręcącą się wokół własnej osi.

This material is provided by the [EMPE Team](#), responsible institution: University of the National Education Commission in Krakow.



Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#) Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

W kontekście różnych wypowiedzi uczniów mogą pojawić się interesujące pomysły wymagające zbadania. Na przykład w jednej z klas padła odpowiedź, by mierzyć odległość od punktu przecięcia przekątnych w kwadracie do boków kwadratu. Wykonano model, w którym sensor położony był na obrotowym krześle (Rys. 14 i 15) i sprawdzono wykres:



Rysunek 14. Model mierzenia odległości punktu przecięcia przekątnych kwadratu od boków kwadratu (1)



Rysunek 15. Model mierzenia odległości punktu przecięcia przekątnych kwadratu od boków kwadratu (2)

This material is provided by the [EMPE Team](#), responsible institution: University of the National Education Commission in Krakow.



Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under This work is licensed under a Creative Commons License [CC BY-NC-SA 4.0](#) Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.